E.N.S.I. P
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

1° *Il est recommandé aux candidats :*

a. *De suivre l'ordre de l'énoncé, en respectant les notations et le numérotage des questions.*

b. *De présenter avec soin et netteté les calculs, et plus encore les résultats.*

2° *On ne demande aucune limitation des erreurs commises.*

Dans un espace euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé, on considère l'endomorphisme explicité par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 11+4\sqrt{3} & 6+6\sqrt{3} & -9-3\sqrt{3} \\ 30-2\sqrt{3} & -4+16\sqrt{3} & -30+2\sqrt{3} \\ 8+23\sqrt{3} & 36+4\sqrt{3} & -6-22\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

1° Former son équation caractéristique (E). On écrira cette équation en exprimant les coefficients *de manière exacte* à l'aide du symbole $\sqrt{3}$.

2° En déduire que (E) peut s'écrire de manière approchée :

$$\lambda^3 + 2{,}464\,\lambda^2 - 28{,}196\,\lambda + 18{,}928 = 0$$

3° Montrer, par de simples substitutions, que (E) admet trois racines réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, dont on donnera les valeurs entières approchées. En déduire des encadrements plus précis, en appliquant pour chaque racine une fois la méthode des parties proportionnelles.

4° En déduire des valeurs approchées des composantes des vecteurs propres V_1, V_2, V_3 correspondant à ces trois valeurs propres (pour chacun d'eux on prendra 1 pour valeur de la troisième composante).

5° L'un des vecteurs propres ainsi obtenu a des composantes dont les valeurs approchées sont voisines de $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. Vérifier, en se reportant à l'expression initiale de M, que le vecteur (1 , 0 , 1) est effectivement un vecteur propre, pour une valeur propre dont on donnera l'expression *exacte*. Pourrait-on utiliser cette valeur pour retrouver certains des résultats précédents?

6° Calculer l'angle que font les vecteurs V_1 et V_3 (on exprimera la valeur de cet angle en *grades*). Calculer également le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs V_1, V_2, V_3.

CONCOURS A

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET METIERS
MATHÉMATIQUES

(2e épreuve)

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 3

Matériel à prévoir : Matériel usuel de dessin.

N.B. — *Les candidats sont invités à écrire lisiblement et à respecter les notations de l'énoncé.*

Les qualités de concision et de clarté seront particulièrement appréciées.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

I

1° a étant un réel > 0 on considère la suite (u_n), $u_n = \frac{a^n}{n!}$; $(0! = 1)$.

Montrer que cette suite est décroissante dès que $n > a$.

Montrer qu'elle est convergente et de limite 0.

2° Pour tout réel t et tout entier $n \geq 0$ on pose :

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \qquad \text{(avec, toujours, } 0! = 1\text{)}.$$

En appliquant à la fonction exponentielle : $u \mapsto e^u$, la formule de Taylor d'ordre n entre 0 et t, déterminer un majorant de

$$\left| e^t - s_n(t) \right|$$

à l'aide de n et de t.

Que peut-on en conclure pour chaque suite $(s_n(t))$?

3° Soient les matrices carrées d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad N = A - I .$$

a. Calculer N^k pour tout entier $k \geqslant 0$.

En déduire une expression de A^n, à l'aide de l'entier $n \geqslant 0$, de I, N et N^2.

b. Pour $n \geqslant 1$ exprimer $\sum_{k=0}^{n} k \frac{t^k}{k!}$ à l'aide de t et $s_{n-1}(t)$.

De même, pour $n \geqslant 2$, exprimer $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \frac{t^k}{k!}$ à l'aide de t et $s_{n-2}(t)$.

c. Pour tout réel t et tout entier $n \geqslant 0$ on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k .$$

Déterminer explicitement $S_0(t)$ et $S_1(t)$.

Pour $n \geqslant 2$, exprimer $S_n(t)$ à l'aide de t, $s_n(t)$, $s_{n-1}(t)$ et $s_{n-2}(t)$.

4° On désigne par $S(t)$ la matrice carrée d'ordre 3 dont les termes sont les limites, quand n tend vers $+\infty$, des termes de mêmes indices de $S_n(t)$; ainsi, si $S_n(t) = (a_{ij,n}(t))$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, on a : $S(t) = (a_{ij}(t))$ avec, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$, $a_{ij}(t) = \lim a_{ij,n}(t)$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les matrices $S(t)$ quand t prend toutes les valeurs réelles.

a. Préciser $S(t)$. Calculer $S(u).S(v)$ pour u et v réels.

b. Quelle structure simple le produit matriciel définit-il sur $\mathcal{S}$?

II

a, b et c étant trois nombres réels et A la matrice définie en I.3°, on cherche trois fonctions x, y et z, de la variable réelle t, dérivables pour tout t réel et telles que, pour tout réel t :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} ,$$

$$(2) \qquad x(0) = a \ , \ y(0) = b \ , \ z(0) = c .$$

1° Vérifier que z est solution d'une équation différentielle du premier ordre et déterminer z.

2° Déterminer de même y puis x.

Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3, $U(t)$, telle que, pour tout réel t on ait :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = U(t) . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

3° L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on désigne par Γ la courbe ensemble des points $M(t)$ définis par la relation :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k} .$$

On suppose désormais $a = b = c = 1$.

a. Dresser le tableau de variations des deux fonctions x et y.

Déterminer les limites :

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) \ , \ \lim_{t \to -\infty} y(t) \ , \ \lim_{t \to +\infty} x(t) \ , \ \lim_{t \to +\infty} y(t) .$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} .$$

b. Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $t = -2$ des fonctions x, y et z.

4° Soit γ la projection orthogonale de Γ sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Construire γ. $\left(\frac{1}{e} \text{ est une valeur approchée de } e^{-2}\right)$.

b. Écrire les équations :

de la tangente T au point $M(-2)$ de Γ.

du plan osculateur P au point $M(-2)$ de Γ.

c. Quelle relation existe-t-il entre γ et l'intersection des plans P et $(O, \vec{i}, \vec{j})$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail